

Corrigé Exercice 1

a. On vérifie que $y' - 2y = \cos(t)$.

b. $y_0 : t \mapsto e^{2t}$

c. $y : t \mapsto Ce^{2t} + \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{2}{5}\cos(t)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Corrigé Exercice 2

1. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y - y^2$ (E_1) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $g = \frac{1}{f}$.

Alors, pour tout réel x , d'après les formules de dérivation :

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

or, f étant solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - f(x)^2$ pour tout réel x ; on en déduit que :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{f(x) - f(x)^2}{f(x)^2} \\ &= -\frac{f(x)}{f(x)^2} + \frac{f(x)^2}{f(x)^2} \\ &= -\frac{1}{f(x)} + 1 \\ &= 1 - g(x) \end{aligned}$$

Donc g est solution de l'équation différentielle :

$$y' = 1 - y \quad (E_2)$$

2. Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions $\varphi : x \mapsto Ce^{-x} + 1$ où C désigne une constante réelle (voir [équations différentielles y'=ay+b](#)).
3. D'après les questions précédentes, si f est une solution de (E_1) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x :

$$\frac{1}{f(x)} = Ce^{-x} + 1 \quad (\text{où } C \in \mathbb{R})$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1}{Ce^{-x} + 1}.$$

Corrigé Exercice 3

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$x^2 + x + 1$ est une fonction positive sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions positives.

On pose $u(x) = x^2 + x + 1$ et on a $u'(x) = 2x + 1$.

La fonction dérivée de $\ln(u(x))$ est la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)} : g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ **Réponse d**

2. Pour déterminer si $f(x) = \ln(x)$ admet pour primitive l'une des fonctions citées, il suffit de les dériver.

Soit $g(x) = x \ln(x) - x$. La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$.

La fonction g est donc une primitive de f .

Réponse c

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} - 1 = -1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} + 1 = 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1} = -1$.

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$, donc finalement par produit de limites, la limite de la suite (a_n) est égale à $-\infty$.

Réponse a

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1		0	-1

La fonction f est :

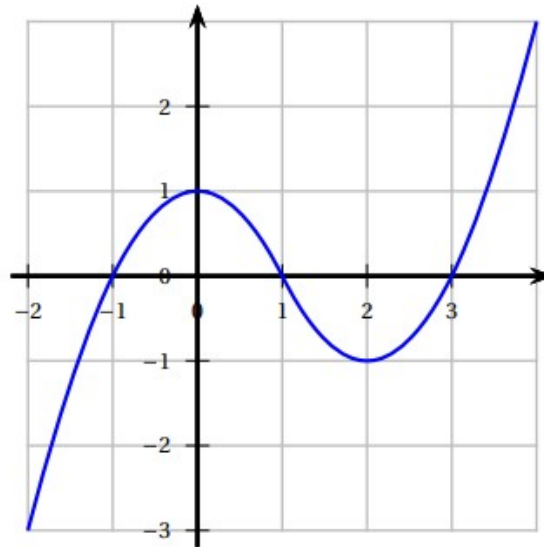
- a. convexe sur $[-2 ; -1]$
c. convexe sur $[-1 ; 2]$

- b. concave sur $[0 ; 1]$
d. concave sur $[-2 ; 0]$

Les variations de la dérivée donnent la convexité de la fonction ; si f' est décroissante alors la fonction est concave.

Comme f' est décroissante sur $[-2 ; 0]$, f est donc concave sur cet intervalle. **Réponse d**

5. On donne ci-dessus la courbe représentant la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.



Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction f .

En 1, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en 1. **Réponse c**

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

Pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle.

Réponse a